TS. NGUYỄN VĂN NHÂN
ThS. PHẠM HỒNG DANH - TRẦN MINH QUANG

BÀI TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ TỔ HỢP

- DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH VÀO CÁC TRƯỜNG ĐH & CĐ
- 152 ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐH TỪ NĂM 1997 ĐẾN NAY

QG Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN VĂN NHÂN
ThS. PHẠM HỒNG DANH – TRẦN MINH QUANG

BÀI TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ TỔ HỢP

- DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH VÀO CÁC TRƯỜNG ĐH & CĐ.
- 152 ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC TỪ NĂM 1997 ĐẾN NAY.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đếm là diệu tưởng

Đo là nghi tâm

(Thơ Bùi Giáng)

Lời nói đầu

Đại số tổ hợp là một môn học khó. Các bài toán dễ sai khi xét thiếu tình huống, xét tình huống bị trùng lặp hay không thấy được đây là bài toán chỉnh hợp hay tổ hợp.

Mục đích cuốn sách này là giúp các em học sinh vượt qua các khó khăn vừa nêu trên, góp phần giúp các em đạt kết quả tốt trong kì thi Tú tài và tuyển sinh vào trường Đại học hay Cao đẳng. Cuốn sách này gồm 5 chương : phép đếm, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và nhị thức Newton.

Trong mỗi chương, phần đầu là phần giáo khoa và các ví dụ đơn giản để học sinh nắm bắt được khái niệm cơ bản, chuẩn bị cho việc vận dụng vào bài tập. Phần sau là bài tập thường được lấy từ các đề thi tuyển sinh, mà lời giải được trình bày rất chi tiết để giúp các em có thể tự học. Chúng tôi còn để lại các bài tập tương tự có đáp số để các em tự kiểm tra mức độ tiếp thu.

Cuối cùng, chắc chắn cuốn sách này không thể tránh được sai sót. Xin bạn đọc góp ý, chúng tôi rất cám ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I

QUY TẮC CƠ BẢN CỦA PHÉP ĐẾM

Môn đại số tổ hợp (có sách gọi là giải tích tổ hợp) chuyên khảo sát các hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp, nhằm xác định số cách xảy ra một hiện tượng nào đó mà không nhất thiết phải liệt kê từng trường hợp.

1. Trong đại số tổ hợp, ta thường dùng hai quy tắc cơ bản của phép đếm, đó là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

a) **Quy tắc cộng :**

Nếu hiện tượng 1 có m cách xảy ra, hiện tượng 2 có n cách xảy ra và hai hiện tượng này không xảy ra đồng thời thì số cách xảy ra hiện tượng này hay hiện tượng kia là : m + n cách.

Ví dụ 1. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường thủy. Cần chọn một đường để đi từ A đến B. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Có : $3 + 2 = 5$ cách chọn.

Ví dụ 2. Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 6 loại nước ngọt. Thực khách cần chọn đúng 1 loại thức uống. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Có : $3 + 4 + 6 = 13$ cách chọn.

b) **Quy tắc nhân :**

Nếu hiện tượng 1 có m cách xảy ra, ứng với mỗi cách xảy ra hiện tượng 1 rồi tiếp đến hiện tượng 2 có n cách xảy ra thì số cách xảy ra hiện tượng 1 "rồi" hiện tượng 2 là : $m \times n$.

Ví dụ 1. Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông : đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về ?

Giải

Có : $3 \times 3 = 9$ cách chọn.

Ví dụ 2. Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 ủy viên thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách ?

Giải

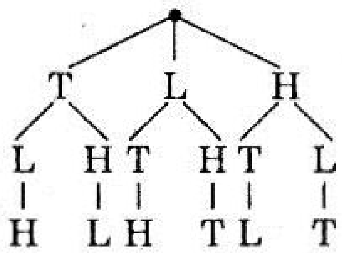
Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký.

Vậy có : $15 \times 14 \times 13 = 2730$ cách chọn.

2. Sơ đồ cây

Người ta dùng sơ đồ cây để liệt kê các trường hợp xảy ra đối với các bài toán có ít hiện tượng liên tiếp và mỗi hiện tượng có ít trường hợp. Chú ý ta chỉ dùng sơ đồ cây để kiểm tra kết quả.

Ví dụ. Trong một lớp học, thầy giáo muốn biết trong ba môn Toán, Lý, Hóa học sinh thích môn nào theo thứ tự giảm dần. Số cách mà học sinh có thể ghi là :



3. Các dấu hiệu chia hết

- Chia hết cho 2 : số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
- Chia hết cho 3 : tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ : 276).
- Chia hết cho 4 : số tận cùng là 00 hay hai chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4 (ví dụ : 1300, 2512, 708).
- Chia hết cho 5 : số tận cùng là 0, 5.
- Chia hết cho 6 : số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- Chia hết cho 8 : số tận cùng là 000 hay ba chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8 (ví dụ : 15000, 2016, 13824).
- Chia hết cho 9 : tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ : 2835).
- Chia hết cho 25 : số tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- Chia hết cho 10 : số tận cùng là 0.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau, không chia hết cho 9.

Giải

Gọi : $n = \overline{abc}$ là số cần lập.

$m = \overline{a'b'c'}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau.

$m' = \overline{a_1b_1c_1}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 9.

Ta có : $n = m - m'$

* Tìm m : có 5 cách chọn a' (vì $a' \neq 0$), có 5 cách chọn b' (vì $b' \neq a'$), có 4 cách chọn c' (vì $c' \neq a'$ và $c' \neq b'$). Vậy có :

$$5 \times 5 \times 4 = 100 \text{ số m.}$$

* Tìm m' : trong các chữ số đã cho, 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là {0, 4, 5}, {1, 3, 5}, {2, 3, 4}.

- Với {0, 4, 5} : có 2 cách chọn a_1, 2 cách chọn b_1, 1 cách chọn c_1, được

$$2 \times 2 \times 1 = 4 \text{ số m'.}$$

- Với {1, 3, 5} : có 3! = 6 số m'
- Với {2, 3, 4} : có 3! = 6 số m'.

Vậy có : $4 + 6 + 6 = 16$ số m'.

Suy ra có : $100 - 16 = 84$ số n.

Chú ý **:** Qua ví dụ trên, ta thấy nếu số cách chọn thỏa tính chất p nào đó quá nhiều, ta có thể làm như sau :

Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn không thỏa p.

Người ta còn gọi cách làm này là dùng "phần bù".

Bài 1. Có 4 tuyến xe buýt giữa A và B. Có 3 tuyến xe buýt giữa B và C. Hỏi :

a) Có mấy cách đi bằng xe buýt từ A đến C, qua B ?

b) Có mấy cách đi rồi về bằng xe buýt từ A đến C, qua B ?

c) Có mấy cách đi rồi về bằng xe buýt từ A đến C, qua B sao cho mỗi tuyến xe buýt không đi quá một lần ?

Giải

a) Có 4 cách đi từ A đến B, có 3 cách đi từ B đến C. Do đó, theo quy tắc nhân, có 4.3 = 12 cách đi từ A đến C, qua B.

b) Có 12 cách đi từ A đến C, qua B và có 12 cách quay về. Vậy, có :

$12 \times 12 = 144$ cách đi rồi về từ A đến C, qua B.

c) Có 4 cách đi từ A đến B, có 3 cách đi từ B đến C; để tránh đi lại đường cũ, chỉ có 2 cách từ C quay về B và 3 cách từ B quay về A.

Vậy, có : $4.3.2.3 = 72$ cách. ■

Bài 2. Một văn phòng cần chọn mua một tờ nhật báo mỗi ngày. Có 4 loại nhật báo. Hỏi có mấy cách chọn mua báo cho một tuần gồm 6 ngày làm việc ?

Giải

Có 4 cách chọn cho mỗi ngày. Vậy, số cách chọn cho 6 ngày trong tuần là : $4^6 = 4096$ cách. ■

Bài 3. Trong một tuần, Bảo định mỗi tối đi thăm 1 người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi Bảo có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn nếu :

a) Có thể thăm 1 bạn nhiều lần ?

b) Không đến thăm 1 bạn quá 1 lần ?

Giải

a) Đêm thứ nhất, chọn 1 trong 12 bạn để đến thăm : có 12 cách. Tương tự, cho đêm thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy.

Vậy, có : $12^7 = 35831808$ cách.

b) Đêm thứ nhất, chọn 1 trong 12 bạn để đến thăm : có 12 cách. Đêm thứ hai, chọn 1 trong 11 bạn còn lại để đến thăm : có 11 cách. Đêm thứ ba : 10 cách. Đêm thứ tư : 9 cách. Đêm thứ năm : 8 cách. Đêm thứ sáu : 7 cách. Đêm thứ bảy : 6 cách.

Vậy có : $12.11.10.9.8.7.6 = 3991680$ cách. ■

Bài 4. Một tuyến đường xe lửa có 10 nhà ga. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cuộc hành trình bắt đầu ở 1 nhà ga và chấm dứt ở 1 nhà ga khác, biết rằng từ nhà ga nào cũng co thể đi tới bất kì nhà ga khác ?

Giải

Nhà ga đi : có 10 cách chọn. Nhà ga đến : có 9 cách chọn.

Vậy có : $10.9 = 90$ cách chọn. ■

Bài 5. Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho :

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ ?

b) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam A, một người nữ B phải ngồi kề nhau ?

c) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam C, một người nữ D không được ngồi kề nhau ?

Giải

a) Có 6 cách chọn một người tùy ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6.

Vậy có : $6.3.2.2.1.1 = 72$ cách.

b) Cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ nhất và chỗ thứ hai, có 2 cách. Tiếp đến, chỗ thứ ba có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Bây giờ, cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và chỗ thứ ba. Khi đó, chỗ thứ nhất có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Tương tự khi cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và thứ ba, thứ ba và thứ tư, thứ tư và thứ năm, thứ năm và thứ sáu.

Vậy có : $5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 40$ cách.

c) Số cách chọn để cặp nam nữ đó không ngồi kề nhau bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn để cặp nam nữ đó ngồi kề nhau.

Vậy có : $72 - 40 = 32$ cách. ■

Bài 6. Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi trong mỗi trường hợp sau :

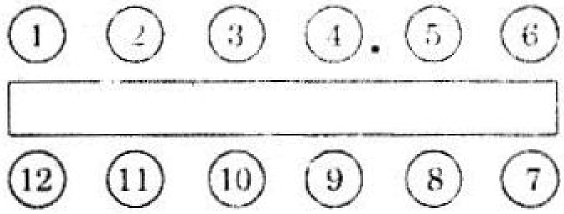
a) Bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.

b) Bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau.

Đại học Quốc gia TP. HCM 1999

Giải

Đánh số các ghế theo hình vẽ



a) Ghế	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số cách xếp chỗ ngồi	12	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1

Vậy số cách xếp 2 học sinh ngồi cạnh hoặc đối diện phải khác trường là :

$$12 \times 6 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2 = 1036800.$$

b) Ghế	1	12	2	11	3	10	4	9	5	8	6	7
Số cách xếp chỗ ngồi	12	6	10	5	8	4	6	3	4	2	2	1

Vậy số cách xếp 2 học sinh ngồi đối diện phải khác là :

$$12 \times 6 \times 10 \times 5 \times 8 \times 4 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 33177600$$ ■

Bài 7. Cho 6 chữ số 2, 3, 5, 6, 7, 9. Hỏi từ các chữ số đã cho, lập được mấy số đôi một khác nhau và :

a) gồm 3 chữ số ?

b) gồm 3 chữ số và nhỏ hơn 400 ?

c) gồm 3 chữ số và chẵn ?

d) gồm 3 chữ số và chia hết cho 5 ?

Giải

Đặt $n = \overline{abc}$

a) Có 6 cách chọn a, 5 cách chọn b ($b \neq a$), 4 cách chọn c ($c \neq a$, $c \neq b$).

Vậy có : $6 \times 5 \times 4 = 120$ số.

b) Chọn $a = 2$ hay $a = 3$, có 2 cách. Sau đó, có 5 cách chọn b ($b \neq a$), 4 cách chọn c ($c \neq a$, $c \neq b$).

Vậy có : $2.5.4 = 40$ số nhỏ hơn 400.

c) Vì n chẵn, có 2 cách chọn c ($c = 2$ hay $c = 6$). Sau đó, có 5 cách chọn a ($a \neq c$), có 4 cách chọn b ($b \neq a$, $b \neq c$).

Vậy có : $2.5.4 = 40$ số chẵn.

d) Vì n chia hết cho 5, có 1 cách chọn c (c = 5). Sau đó, có 5 cách chọn a (a ≠ c), có 4 cách chọn b (b ≠ a, ≠ c).

Vậy có : 1.5.4 = 20 số chia hết cho 5. ■

Bài 8. Có 10000 vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau.

Đại học Quốc gia Hà Nội Khối G 1997

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số in trên mỗi vé.

Số cách chọn a_1 là 10 (a_1 có thể là 0).

Số cách chọn a_2 là 9.

Số cách chọn a_3 là 8.

Số cách chọn a_4 là 7.

Số cách chọn a_5 là 6.

Vậy số vé gồm 5 chữ số khác nhau : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$. ■

Bài 9. Xét dãy số gồm 7 chữ số (mỗi chữ số được chọn từ 0, 1, ..., 8, 9) thỏa chữ số vị trí số 3 là số chẵn, chữ số cuối không chia hết cho 5, các chữ số 4, 5, 6 đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Đại học Quốc gia TP. HCM 1997

Giải

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2...a_7}$.

Số cách chọn a_3 là 5 (do a_3 chẵn).

Số cách chọn a_7 là 8 (do $a_7 \neq 0$ và $\neq 5$).

$\left.\begin{array}{l}\text{Số cách chọn } a_4 \text{ là } 10\\ \text{Số cách chọn } a_5 \text{ là } 9\\ \text{Số cách chọn } a_6 \text{ là } 8\end{array}\right\}$ (do a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau).

Số cách chọn a_1 là 10 (do n là dãy số nên a_1 có thể là 0).

Số cách chọn a_2 là 10.

Vậy số cách chọn là : $5 \times 8 \times 10 \times 9 \times 8 \times 10 \times 10 = 2880000$. ■